

不连续岩体扩展有限元法的前处理

万林林, 余天堂

(河海大学 力学与材料学院, 南京 210098)

摘 要: 扩展有限元法是针对不连续问题提出的一种改进的有限元法, 由于其计算网格独立于结构内不连续面, 该方法十分适用于处理不连续问题, 因此, 该方法需能将不连续面和计算网格的几何信息转化为计算分析所需的单元拓扑信息的前处理。针对扩展有限元法在不连续岩体问题中的应用, 系统地研究了二维扩展有限元解决不连续问题时单元拓扑信息生成等前处理问题, 给出了单元拓扑信息自动生成算法, 将不连续面和计算网格几何信息转化为计算所需要的单元拓扑信息, 并在此基础上开发了不连续岩体二维扩展有限元法前处理程序。结果表明该算法和程序的适用性和正确性, 同时还表明扩展有限元法在不连续岩体问题求解中有较好的应用前景。

关 键 词: 不连续岩体; 前处理; 扩展有限元法; 拓扑信息自动生成系统

中图分类号: TU 452

文献标识码: A

Preprocessing of extended finite element method for discontinuous rock masses

WAN Lin-lin, YÜ Tian-tang

(College of Mechanics and Materials, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: The extended finite element method (XFEM) is proposed for discontinuous problems. It is widely used to solve discontinuous problems due to the independence of computational meshes and discontinuous interfaces. Therefore, the preprocessing that transforms discontinuous interfaces and computational meshes geometry information to topological information becomes precondition of this method. According to the application of two-dimensional XFEM to discontinuous rock masses problems, generation of mesh and topological information of elements are studied. Two-dimensional preprocessing program is developed according to the algorithm of automatic generation of topological information. The geometry information of interfaces and meshes is converted to topological information which is needed in the computation. The results demonstrate the applicability and correctness of the program. In addition, the promising potential of the XFEM application to discontinuous rock masses problems is proved.

Key words: discontinuous rock masses; pre-processing; extended finite element method; automatic topological information generation system

1 引 言

岩体中普遍存在如裂隙、断层、节理、软弱夹杂等不连续面。常规有限元分析不连续岩体时, 需要将不连续面作为单元的边界, 这样大大增加了有限元前处理的工作量和复杂性; 同时, 不可避免地会出现一些形态较差的单元, 从而影响分析精度和收敛性。

扩展有限元法是美国西北大学 Belytschko 等^[1]针对不连续问题提出的一种改进的有限元法, 其基

本原理是基于单元分解的思想在常规有限元位移模式中加进一些特殊函数(称作加强函数)以反映不连续面的存在^[2]。扩展有限元的网格离散时不需要考虑结构的任何内部细节, 只需要按照结构的几何外形尺寸生成(见图 1), 这样极大地减少了网格剖分的工作量, 同时可方便地形成高质量的计算网格。因此, 该方法特别适合分析不连续问题。扩展有限元最初用于求解线性断裂力学问题。后来, 很多研究者发展了该方法或利用该方法求解各种不连续问题^[3-6]。扩展有限元法的实质是将不连续问题复杂

的前处理转化为计算问题。

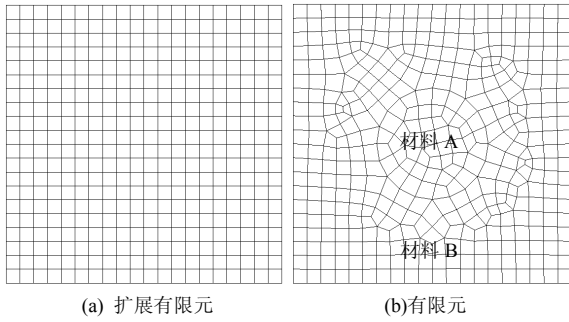


图 1 计算网格
Fig.1 Computational meshes

扩展有限元计算网格独立于不连续面，但计算分析中需要根据计算网格和不连续面的几何位置，确定加强节点、加强方式和积分区域。因此，扩展有限元分析中需要一个可自动、高效地将复杂不连续面和计算网格的几何信息转化为拓扑信息的前处理程序。

不连续岩体扩展有限元法的前处理包括：网格离散和单元拓扑信息生成两部分。论文首先简要介绍不连续岩体的扩展有限元法，然后重点分析单元拓扑信息生成。

2 不连续岩体的扩展有限元法

扩展有限元法的单元内可含有不连续面，因此，扩展有限元法的位移由两部分组成，一部分是常规有限元法的位移，另一部分是加强位移（反映内边界的存在）。扩展有限元法的位移逼近为下列形式^[7]：

$$u(X) = \sum_{I \in L_1} u_I N_I(X) + \sum_{J \in M_1} a_J \bar{N}_J(X) \Psi(X) \quad (1)$$

式中： $N_I(X)$ 和 $\bar{N}_J(X)$ 为有限元形函数， $\bar{N}_J(X)$ 和 $N_I(X)$ 可以相同，也可以不同； u_I 和 a_J 为节点位移和加强变量； $\Psi(X)$ 为加强函数； L_1 为离散结构节点集； M_1 为加强节点集，加强节点为支撑域内含有不连续面的节点。

扩展有限元法中，加强函数的选择与不连续问题的类型有关^[8-9]。文献[10]建立了不连续岩体的扩展有限元法的位移逼近，考虑的不连续面为材料界面、断层、节理。

2.1 界面问题

采用水平集法描述材料界面，水平集函数在界面处的值等于 0。水平集函数常取下列符号距离函数，即

$$\varphi(X) = \min \|X - X^*\| \text{sign}((X - X^*) \cdot \mathbf{n}) \quad (2)$$

式中： X^* 为界面上与点 X 距离最近的点； $\mathbf{n}$ 为界面在点 X^* 处的法向矢量。

Moës 等^[9]基于水平集函数定义了一种加强函数，即

$$\Psi(X) = \sum_I |\varphi_I| N_I(X) - \left| \sum_I \varphi_I N_I(X) \right| \quad (3)$$

式中： φ_I 为水平集函数的节点值。

式 (3) 表示的加强函数在界面有一个脊，不含界面的单元，该加强函数值等于 0。图 2 中每个节点在每个方向上有 1 个加强变量。

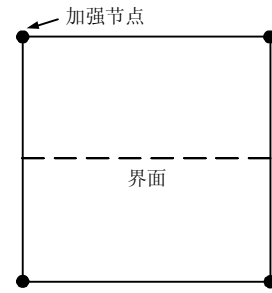


图 2 含界面单元

Fig.2 One element with one material interface segment

2.2 断层（节理）问题

若单元含有一条断层段（见图 3），该单元与断层形成了两个界面。断层问题的扩展有限元法的位移逼近可表示为

$$u(X) = \sum_{i \in I} u_i N_i(X) + \sum_{j \in L_1} a_j N_j(X) \Psi_1(X) + \sum_{k \in L_2} b_k N_k(X) \Psi_2(X) \quad (4)$$

式中： $\Psi_1(X)$ 和 $\Psi_2(X)$ 分别为两个界面的水平集函数，其表达式如式 (3)；加强节点集 L_1 和 L_2 分别为支撑域内含有第 1 个和第 2 个界面的节点的集合。

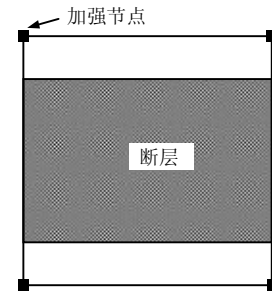


图 3 含断层单元

Fig.3 One element with one fault segment

含断层的单元，单元内加强函数有两个脊，分别集中在两个界面处；不含断层的单元，加强函数值等于 0。图 3 中每个节点在每个方向上有 2 个加

强变量。

若某单元含有 m 条断层, 该单元与断层形成了 $2m$ 个界面, 则扩展有限单元法的位移逼近为

$$u(X) = \sum_{i \in I} u_i N_i(X) + \sum_{k=1}^{2m} \sum_{j \in L} a_{kj} N_j(X) \Psi_k(X) \quad (5)$$

断层往往会湮灭在计算域内, 这样, 湮灭点要么位于单元边界上(见图 4(a)), 要么位于单元内(见图 4(b))。图 4(a)中 cd 边上不能满足位移连续性。图 4(b)中加强函数很难确定。为此, 过湮灭点 p , 将断层与岩体的两个界面 ap 和 bp 延长至计算域边界(见图 4(c)), 然后按 ac 和 bd 两个界面问题处理。由于人为的增加了两段界面 (pc 和 pd), 所以计算量会有所增加。

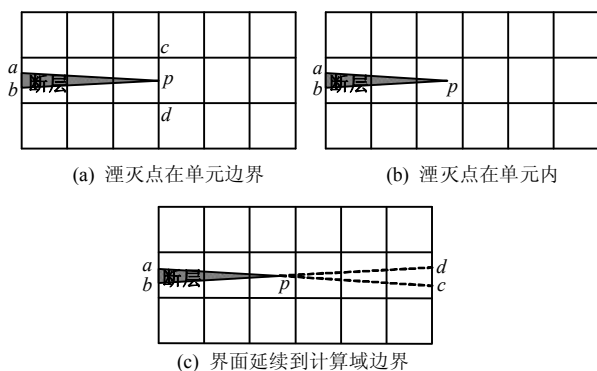


图 4 断层与单元的位置

Fig.4 Location of fault and elements

若单元和断层只有一个界面, 则按一个界面问题处理, 其位移逼近为式 (1); 若单元和断层有多个界面, 其位移逼近为式 (5)。因此, 同一个单元内, 节点会有不同的加强方式, 即不同的加强变量数(见图 5)。

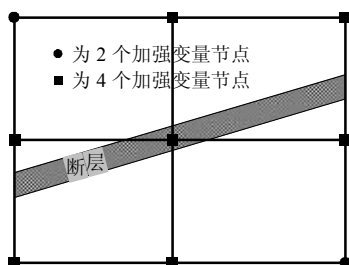


图 5 节点加强方式

Fig.5 Types of enriched nodes

位移模式构造后, 就可以和常规有限元方法一样, 由虚功原理推导扩展有限单元法求解的基本控制方程。含不连续面的单元, 积分时必须分区积分,

即将不连续面切割的单元划分成一些子单元, 每个子单元内为同一种材料, 单元积分转为在这些子单元上积分。

由于扩展有限元的网格离散时不需要考虑不连续面的存在, 这样有些单元包含多种材料, 在计算模型中不必先定义每个单元的材料性质, 而是在计算过程中根据积分点的水平集函数值确定材料性质。

3 网格离散

由于扩展有限元的网格与结构内部细节无关, 所以, 扩展有限元的网格剖分只需要按照结构的几何外形尺寸生成, 这样大大简化了计算网格的形成。迄今为止, 已有很多网格生成算法, 其中行波法是一种被广泛应用的方法, 文献[11]给出了基于行波法区域自动离散程序设计的详细步骤, 本文不再赘述该内容。

4 单元拓扑信息生成

单元拓扑信息生成是指根据计算网格和不连续面的位置确定加强节点、节点加强方式、整合离散点信息和形成积分子单元。

4.1 线段求交

采用水平集函数计算线段与不连续面交点, 其算法如下:

(1) 线段的两个端点关于不连续面的水平集函数分别为 $\phi(X_i)$ 、 $\phi(X_{i+1})$;

(2) 如果 $\phi(X_i)\phi(X_{i+1}) \leq 0$, 线段和不连续面相交, 交点为 X_{cross} ;

若 $\phi(X_i) + \phi(X_{i+1}) = 0$, 则

$$X_{\text{cross}} = \frac{X_i + X_{i+1}}{2} \quad (6)$$

若 $\phi(X_i) + \phi(X_{i+1}) \neq 0$, 则

$$X_{\text{cross}} = \frac{\phi(X_i)}{\phi(X_i) + \phi(X_{i+1})} X_i + \frac{\phi(X_{i+1})}{\phi(X_i) + \phi(X_{i+1})} X_{i+1} \quad (7)$$

(3) 如果 $\phi(X_i)\phi(X_{i+1}) > 0$, 线段和不连续面不相交。

该算法用于不连续面交点的确定和加强节点的确定。算法通用于二维和三维问题。

4.2 不连续面交点的确定

对于含多不连续面的结构, 可能出现不连续面交叉的问题。处理此类问题, 需要先找出交叉的不连续面及交点。由于不连续面的复杂性, 这里采用以拐点作为控制点信息的折线来表示。判断某个不

连续面与其余不连续面是否交叉, 可采用线段求交算法判断这条折线上所有线段与其余不连续面是否相交, 如果相交, 其交点即为两个不连续面的交点。

4.3 加强节点、加强方式的确定及离散点的整合

扩展有限元中, 含有不连续面单元的节点需要进行加强, 每包含一个不连续面, 节点每个方向增加一个自由度, 用于描述不连续面的存在, 增强有限元逼近空间, 这样的单元称为加强单元。因此, 需要一个不仅能判断加强节点, 而且能判断节点加强方式的算法, 同时该算法还需要能够获取含不连续面单元的离散点信息。离散点包括单元节点、单元边界与不连续面交点以及单元所包含的不连续面控制点(折线拐点)和交点, 用于后续数值积分分子单元的形成。文献[9]针对控制点在单元边界上的封闭不连续面情况给出了一种数值算法, 本文针对复杂不连续岩体问题的特点, 给出如下算法:

(1) 单元所有的节点关于某条不连续面的水平集函数为 $\phi(X_i)$, i 为单元节点号。

(2) 判断加强节点:

①如果 $\max(\phi(X_i))\min(\phi(X_i)) \geq 0$, 单元不含不连续面, 即为常规有限元单元; ②如果 $\max(\phi(X_i))\min(\phi(X_i)) < 0$, 单元含不连续面, 单元所有节点为加强节点, 单元为加强单元。

(3) 判断加强节点加强方式:

对所有不连续面采用算法(2), 判断加强单元是否包含多条不连续面; ①若只包含有一条不连续面, 该单元加强节点的加强变量为 2 (见图 6(a)、6(b)); ②若包含多条不连续面, 该单元加强节点的加强变量为 $2m$ (m 为不连续面数)(见图 6(c)、6(d));

(4) 整合加强单元离散点信息:

①对含不连续面的加强单元所有边界采用线段求交算法, 计算出该不连续面与单元边界的交点 X_{disc} (见图 6); ②判断加强单元所包含不连续面控制点 X_{int} (折线的拐点) 是否包含在单元内(见图 6(b)); ③对包含多条不连续面的加强单元, 若所包含的不连续面有交点, 判断交点是否位于单元内(见图 6(d)); ④整合加强单元的节点、单元边界与不连续面交点以及单元所包含的不连续面的控制点和交点等信息, 作为加强单元离散点信息 (见图 6)。

4.4 积分子单元

在扩展有限元中, 连续区域的积分和常规有限元相同, 对不连续面穿过的单元, 一般采用子区域积分方案^[9]。含不连续面的单元被不连续面分割成多个不规则多边形子区域, 单元积分转变为在不规则多边形子区域上积分。文献[12]采用一种基于

Schwarz-Christoffel 保型变换的数值积分方法, 对各多边形区域积分。利用平面多边形控制点(加强单元离散点)信息将多边形区域映射为复平面上的单位圆, 形成积分点坐标和权重。但是相对于 Gauss 积分, 该方法收敛性差, 并且仅适用于二维平面问题, 因此, 本文仍采用 Gauss 积分。

对于 Gauss 积分, 包含不连续面的加强单元无法直接采用 Gauss 积分, 可根据加强单元离散节点信息, 采用 Delaunay 算法形成不包含不连续面的子三角形。由于子三角形上不包含不连续面, 可以采用 Gauss 积分, 获得子三角形积分点信息(积分点局部坐标和权重), 最后整合为整个单元的积分点信息(积分点局部坐标和权重)(见图 7)。

子单元的材料性质, 可根据单元内积分点的水平集函数 ϕ 的符号进行确定 (见图 8)。

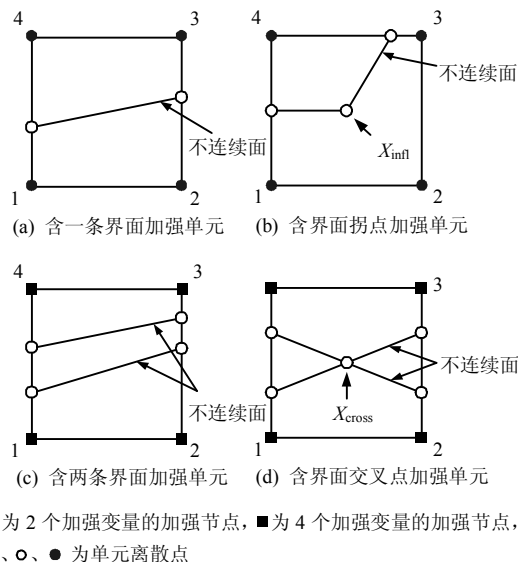


图 6 加强节点、加强方式和离散点

Fig.6 Enriched nodes, types of enriched nodes and discrete points

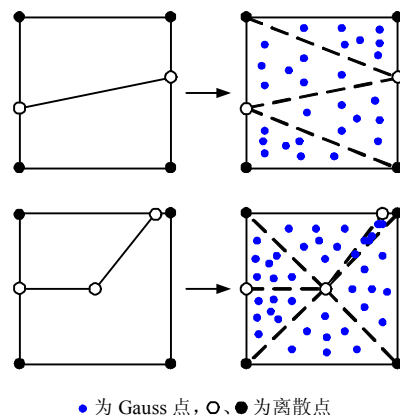
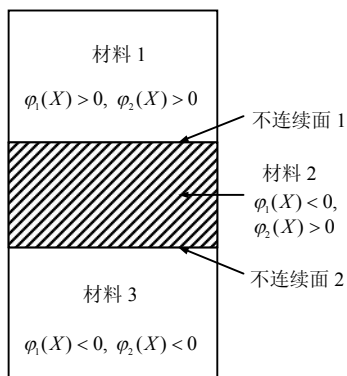


图 7 子单元 Gauss 积分点

Fig.7 Gauss points of discontinuous elements

图 8 根据 $\varphi(X_{\text{Gauss}})$ 的符号判断材料类型Fig.8 Choice of material type with the sign of $\varphi(X_{\text{Gauss}})$

5 前处理程序实现和检验

本文采用 Matlab 语言编写了不连续岩体扩展有限元法前处理程序, 程序流程图如图 9。程序采用模块化设计, 可以与后续计算程序模块实现无缝连接, 且具有良好的扩充性, 便于程序的继续开发和完善。

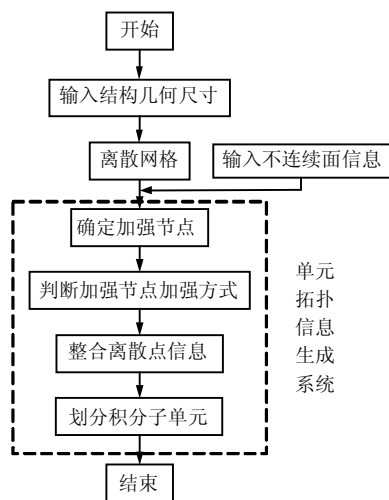


图 9 程序流程图

Fig.9 Flow diagram of preprocessing program

为验证方法的适用性和正确性, 本文选择一个岩质边坡问题进行分析 (见图 10)。边坡高为 12 m、坡底宽为 12 m、坡顶宽为 6 m, 含两条节理和一条材料界面, 由 3 种材料组成, 考虑自重作用。

采用本文算法及程序对该算例进行前处理。由于扩展有限元的网格剖分只需要按照结构的几何外形尺寸生成, 所以网格剖分工作大大简化, 且网格质量较高 (见图 11)。

单元拓扑信息系统是本文前处理程序的重要组成部分, 因此, 验证其准确性十分必要。该系统分主要有两个部分: 判断加强节点及加强方式, 整合

离散点信息; 划分积分分子单元。本文给出算例的部分不连续区域加强节点图 (见图 12) 和 4.3 节中 4 种典型加强单元子单元积分的 Gauss 积分图 (见图 13), 以验证该系统的准确性。

通过图 12、13, 可以看出, 单元拓扑信息自动生成系统可以正确的判断不连续面附近加强节点以及加强节点的加强方式, 准确的获取加强单元离散点信息, 形成积分分子单元, 获取积分点信息。需要说明的是, 本文对常规单元采用 4 点 Gauss 积分, 而对加强单元积分分子单元, 由于不连续面的存在, 采用 7 点 Gauss 积分。

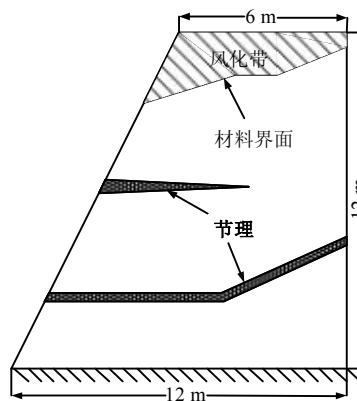


图 10 不连续岩质边坡

Fig.10 Discontinuous rock slope

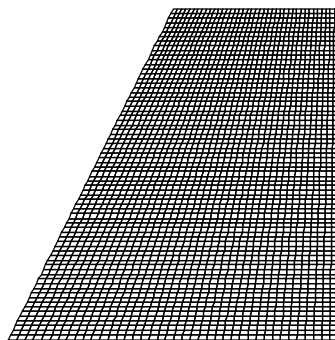
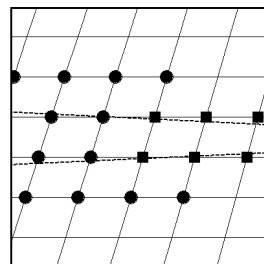


图 11 不连续岩质边坡计算网格图

Fig.11 Computational meshes of discontinuous rock slope



● 为 2 个加强变量的加强节点, ■ 为 4 个加强变量的加强节点

图 12 加强节点和加强方式(局部区域)

Fig.12 Enriched nodes and enriched types (local region)

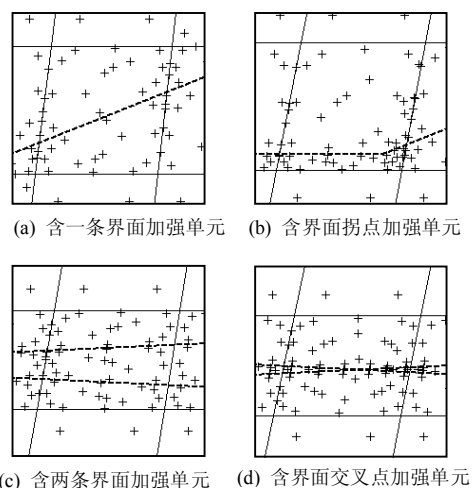


图 13 Gauss 积分点(局部区域)

Fig.13 Gauss integration points

通过算例的前处理,验证了本文方法和程序对于不连续岩体问题前处理的适用性和可靠性。

在上述前处理结果的基础上,本文采用文献[10]所建立的不连续岩体扩展有限元方法对算例进行分析,并将结果与常规有限元(Ansys)比较。

图 14 为常规有限元计算网格图。常规有限元的网格必须将不连续面作为单元的边界,因此,划分网格时,需要依据不连续面,将计算区域划分为多个只包含一种材料的子区域,分区域划分网格。由于不连续面的影响,常规有限元的网格与扩展有限元网格(见图 11)相比较,容易发现,常规有限元的网格质量较差,同时由于劈尖的存在,常规有限元的网格存在三角形单元。

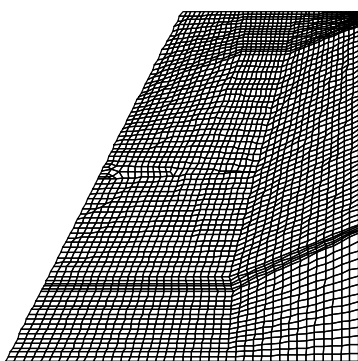
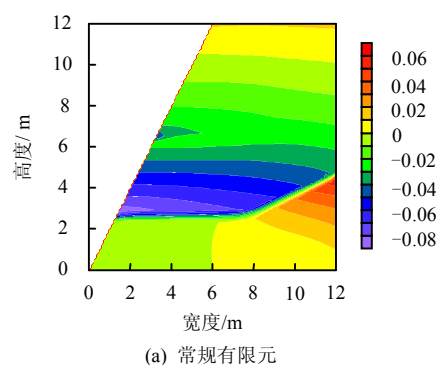


图 14 常规有限元计算网格图

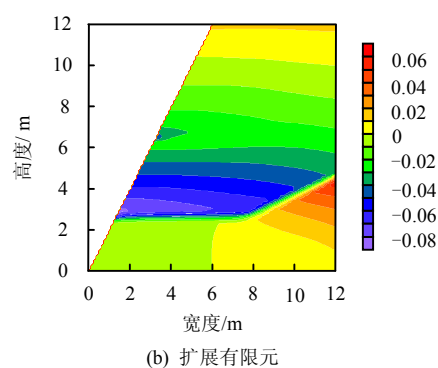
Fig.14 Computational meshes of discontinuous rock slope for classical FEM

为验证不连续岩体扩展有限元法和本文程序结果的正确性,本文对算例在同等规模网格下的常规有限元和扩展有限元计算结果进行比较,分别给出两者计算结果的水平和铅直位移云图。

通过对上述云图(图 15、16)的比较,容易发现扩展有限元的结果同常规有限元的结果几乎完全相同,从而证明了该方法和程序的正确性。



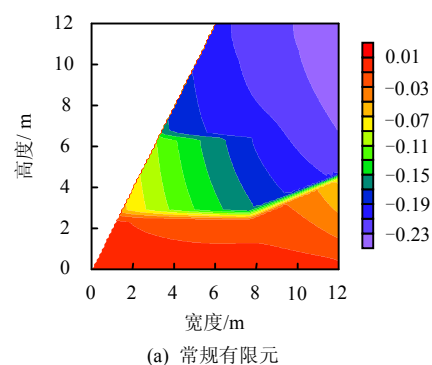
(a) 常规有限元



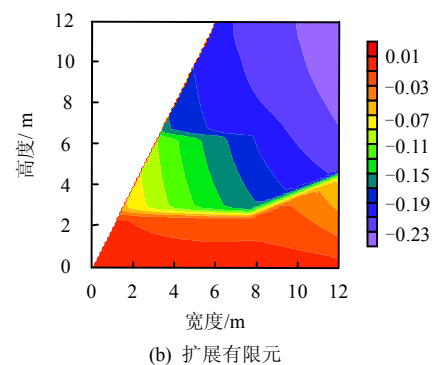
(b) 扩展有限元

图 15 水平位移云图比较(单位: mm)

Fig.15 Comparison of horizontal displacement contours (unit: mm)



(a) 常规有限元



(b) 扩展有限元

图 16 铅直位移云图比较 (单位: mm)

Fig.16 Comparison of vertical displacement contours (unit: mm)

6 结 论

扩展有限元法克服了结构内部不连续面对网格剖分的影响,大大提高了网格质量,是目前处理不连续问题最为有效的数值方法。本文在系统研究了二维扩展有限元解决不连续岩体问题的基础上,重点讨论了单元拓扑信息生成等前处理问题,并给出了处理不连续岩体问题时单元拓扑信息自动生成一系列算法,开发出了不连续岩体二维扩展有限元法拓扑信息自动生成系统。

单元拓扑信息自动生成系统将不连续岩体问题复杂、繁琐的前处理问题转化为计算问题,用计算机计算替代了大量繁杂的人工处理,极大地简化了前处理工作。同时,该系统对于多不连续面、不连续面交叉等问题的处理的适用性,扩展了扩展有限元法的适用范围,增强了其解决工程实际问题的能力。

本文所研究的单元拓扑信息自动生成算法和程序完全可以推广到不连续岩体扩展有限元法三维问题中。

模拟裂纹扩展是扩展有限元最突出的优势,采用扩展有限元模拟不连续岩体的开裂问题具有重要的现实意义。只需稍作修改,本文给出的前处理方法即可用于扩展有限元模拟不连续岩体的开裂分析。

参 考 文 献

- [1] BELYTSCHKO T, BLACK T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1999, 45(5): 601—620.
- [2] MELENK J M, BABUSKA I. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications[J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 1996, 139(1-4): 289—314.
- [3] SAMANIEGO E, BELYTSCHKO T. Continuum discontinuum modelling of shear bands[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2005, 62(13): 1857—1872.
- [4] CHESSA J, BELYTSCHKO T. An extended finite element method for two-phase fluids[J]. **Journal of Applied Mechanics**, 2003, 70(1): 10—17.
- [5] WAGNER G J, MOËS N, LIU W K, et al. The extended finite element method for rigid particles in stokes flow[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2001, 51(3): 293—313.
- [6] CHESSA J, SMOLINSKI P, BELYTSCHKO T. The extended finite element method (XFEM) for solidification problems[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2002, 53(8): 1959—1977.
- [7] BELYTSCHKO T, MOËS N, USUI S, et al. Arbitrary discontinuities in finite elements[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2001, 50(4): 993—1013.
- [8] STOLARSKA M, CHOPP D L, MOËS N, et al. Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2001, 51(8): 943—960.
- [9] SUKUMAR N, CHOPP D L, MOËS N, et al. Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method[J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2001, 190(46-47): 6183—6200.
- [10] 余天堂, 万林林, 任青文. 不连续岩体的扩展有限单元法分析[J]. **水力发电学报**, 2010, 29(5): 92—97.
YÜ Tian-tang, WAN Lin-lin, REN Qing-wen. Analysis of discontinuous rock masses by an extended finite element method[J]. **Journal of Hydroelectric Engineering**, 2010, 29(5): 92—97.
- [11] 秦卫星, 张岳安, 强晟, 等. 不连续岩体二维复合单元法前处理[J]. **长沙理工大学学报**, 2009, 6(1): 29—35.
QIN Wei-xing, ZHANG Yue-an, QIANG Sheng, et al. Pre-process of two-dimensional composite element method for discontinuous rock masses[J]. **Journal of Changsha University of Science and Technology (Natural Science)**, 2009, 6(1): 29—35.
- [12] NATARAJAN S, BORDAS S, MAHAPATRA D R. Numerical integration over arbitrary polygonal domains based on Schwarz–Christoffel conformal mapping[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2009, 80: 103—104.